23.02.2018 Теория на мярката (упражнения)

Зад 1 Докажете, че

(а) $m^*(\emptyset)=0$

(б) $m^*\{c\}=0$

(в) $m^*(\mathbb{Q}\cap[0,1])=0$

Реш. (а) Проверяваме с дефиницията

$I=[a,b]: S=\emptyset\subseteq I$

$J=(-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2})$

$\emptyset\subseteq J$ и $\Rightarrow \inf\left(\sum_{i=1}^{\infty} d(J_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \supseteq S,\ J_i \text{ - интервали}\right) \le d(J)=\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow m^*(\emptyset)\le\varepsilon\ \forall\varepsilon>0 \Rightarrow m^*(\emptyset)=0$

(б) Аналогично с интервал $J=(c-\frac{\varepsilon}{2}, c+\frac{\varepsilon}{2})\supseteq\{c\}$

(в) $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ е изброимо. Нека $\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{q_1,q_2,\dots,q_n,\dots\}$

и $J_i=(q_i-\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, q_i+\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}) \Rightarrow d(J_i)=\frac{\varepsilon}{2^i}$.

Но $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \Rightarrow m^*(\mathbb{Q}\cap[0,1])\le\sum_{i=1}^{\infty} d(J_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}=\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\mathbb{Q}\cap[0,1])=0$. Аналогично твърдение важи за всяко изброимо множество

Зад. 2 Докажете, че $m^*([\alpha,\beta])=\beta-\alpha=m^*((\alpha,\beta])=m^*((\alpha,\beta))$

Реш. Понеже $[\alpha,\beta]$ покрива сам себе си, имаме

$m^*([\alpha,\beta])=\inf\left(\sum_{i=1}^{\infty} d(J_i) : \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i\supseteq[\alpha,\beta],\ J_i \text{ - интервал}\right)\le d([\alpha,\beta])=\beta-\alpha$

Остава да докажем, че $m^*([\alpha,\beta])\ge\beta-\alpha$. Това следва от твърдението $\sum_{i=1}^{\infty} d(J_i)\ge\beta-\alpha$ $\forall$ покритие $\{J_i\}$ на $[\alpha,\beta]$.

Разглеждаме случая на крайно покритие - n на брой интервали $J_1, \dots, J_n$: $\bigcup_{i=1}^{n} J_i \supseteq [\alpha, \beta]$.

$\chi_S(x) := \begin{cases} 1, x \in S \\ 0, x \notin S \end{cases}$. Тогава $\sum_{i=1}^{n} \chi_{J_i}(x) \geq \chi_{[\alpha,\beta]}(x) \mid \int_\alpha^\beta \cdot\, dx$ (Риман)

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_{J_i}(x)\right) dx \geq \int_\alpha^\beta \chi_{[\alpha,\beta]}(x)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\alpha^\beta \chi_{J_i}(x)\,dx \geq \beta - \alpha.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_{J_i \cap [\alpha,\beta]} \chi_{J_i}(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} d(J_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d(J_i) \geq \beta - \alpha$$

<u>Т-ма</u> (Хайне - Борел) Ако $\{J_i\}$ е фамилия от отворени интервали такива, че $\bigcup_{i \in I} J_i \supseteq [\alpha, \beta]$, то $\exists$ крайна подфамилия $\{J_{i_k}\}_{k=1}^{n}$, която също покрива $[\alpha, \beta]$

<u>Зад. 2</u> (продължение)

Остана да разгледаме общия случай. Нека $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ е покритие на $[\alpha,\beta]$ с интервали. Построяваме отв. интервали $\{J_i'\}$ със свойството

J_i има краища α_i и $\beta_i \Rightarrow J_i' = \left(\alpha_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \beta + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)$.

$J_i' \supseteq J_i \Rightarrow \{J_i'\}$ е отв. покритие на $[\alpha,\beta]$. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} d(J_i') \geq \beta - \alpha$.

но $\sum_{i=1}^{\infty} d(J_i') = \sum_{i=1}^{\infty} d(J_i) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} d(J_i) \geq \beta - \alpha - \varepsilon \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} d(J_i) \geq \beta - \alpha$ $\square$

02.03.2018

Зад.1 Докажете, че $m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j,\beta_j)\right)=\sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j-\alpha_j)$, където $(\alpha_i,\beta_i)\cap(\alpha_j,\beta_j)=\emptyset$ за $i\neq j$

Д-во Да забележим, че $m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j,\beta_j)\right)\leq\sum_{j=1}^{n}m^*((\alpha_j,\beta_j))=\sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j-\alpha_j)$.

За да докажем обратното неравенство, ще използваме, че за краен брой интервали

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j-\alpha_j)=\sum_{j=1}^{n}m^*((\alpha_j,\beta_j))\leq m^*\left(\bigcup_{j=1}^{n}(\alpha_j,\beta_j)\right)\ \forall n$$

$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j-\alpha_j)\leq m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(\alpha_j,\beta_j)\right)$$

□

Зад.2 Нека $S\subset\mathbb{R}$ е ограничено и $c\in\mathbb{R}$. Докажете, че

(а) $m^*(c+S)=m^*(S)$

(б) Ако S е измеримо, то $c+S$ също е измеримо, като $m(S)=m(c+S)$

Д-во (а) Ясно е, че ако $O\supseteq S$, то $c+O\supseteq c+S$ също е отворено. Като използваме, че всяко отворено множество O се представя (и то по единствен начин, ако $O\neq\emptyset$) като изброимо обединение на непразни, отворени, непресичащи се два по два интервали и $m^*(O)$ е сумата от дължините на тези интервали. Заключаваме, че $m^*(O)=m^*(c+O)$, тъй като транслирането на интервал не променя дължината му. Тогава

$$m^*(c+S)=\inf_{\text{отв.}O\supseteq S}m^*(c+O)=\inf_{\text{отв.}O\supseteq S}m^*(O)=m^*(S)$$

(б) следва от (а) - за домашна

□

Зад. 3 Докажете, че ако $S_1 \subseteq S_2 \subseteq I$, то $m_*(S_1) \le m_*(S_2)$

Д-во
$$\left.\begin{aligned} m_*(S_1) &= d(I) - m^*(I\setminus S_1) \\ m_*(S_2) &= d(I) - m^*(I\setminus S_2) \end{aligned}\right\} (*)$$

Но $S_1 \subseteq S_2 \subseteq I \Rightarrow I\setminus S_2 \subseteq I\setminus S_1 \Rightarrow m^*(I\setminus S_2) \le m^*(I\setminus S_1)$ (#)

От (*) и (#) $\Rightarrow m_*(S_1) \le m_*(S_2)$

$\square$

Зад. 4 Нека $S \subseteq \mathbb{R}$ е огр. ($S \subseteq I$). Докажете, че $m_*(S) = \sup\limits_{\text{комп. } K \subseteq S} m^*(K)$

Зад. 5 Докажете, че лебеговата мярка поражда ~~все~~ повече измерими множества, отколкото мярката на Пеано-Жордан

Често използвани в теорията на мярката свойства на множествата:

(а) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_1^c \supseteq S_2^c$

$S \subseteq \mathbb{R}$
$S^c = \mathbb{R}\setminus S$ - допълнение

(б) Закони на де Морган:

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha\Big)^c = \bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha^c$$

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in A} S_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha^c$$

В частност, $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

09.03.2018

Зад. 1 Докажете, че ако S е ограничено измеримо по Лебег множество, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ крайна фамилия от отворени интервали $\{J_k\}_{k=1}^{n}$ такива, че

$$M(S \Delta U) < \varepsilon$$

където $U := \bigcup_{k=1}^{n} J_k$

Деф. $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Забел. Борел предлага тази теорема да се нарича втора основна теорема на теорията на мярката. Основната теорема на теорията на мярката според него е теоремата на Хайне - Борел.

Зад. 2 Покажете, че за всяко ограничено $S \subseteq \mathbb{R}$ следните твърдения са еквивалентни:

(а) S е измеримо (по Лебег)

(б) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ отв. $U \supseteq S : m^*(U \setminus S) < \varepsilon$

(б') $\exists$ отв. $U_j \supseteq S$, $j = 1, 2, \dots$: $m^*(\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j \setminus S) = 0$

(в) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ затв. (компактно) $C \subseteq S : m^*(S \setminus C) < \varepsilon$

(в') $\exists$ затв. $C_j \subseteq S$, $j = 1, 2, \dots$: $m^*(S \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j) = 0$

Зад 3 Ако S е множество с мярка 0 и $S' \subseteq S$, то S' е също измеримо и $m(S')=0$.

Заб. Това свойство се нарича пълнота на лебеговата мярка.

16.03.2018

Зад.1 Нека $S_1, S_2, \ldots$ са измерими, $S_1 \supseteq S_2 \supseteq \ldots$, $\mu(S_1) < \infty$. Докажете, че $\mu(S_n) \downarrow \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n)$.

Решение (Георги)

Разгл. редицата с общ член $T_i = S_1 \setminus S_i$. Тогава от

$S_i \supseteq S_{i+1} \Rightarrow T_i = S_1 \setminus S_i \subseteq S_1 \setminus S_{i+1} = T_{i+1}$. Ясно е, че T_i са измерими $\forall i$. Тогава $\mu(T_i) = \mu(S_1 \setminus S_i) = \mu(S_1) - \mu(S_i)$.

Както знаем от $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots \Rightarrow \mu(T_i) \uparrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i)$. (1)

Да забележим, че $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}(S_1 \setminus S_i) = S_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i) = \mu(S_1) - \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i)$

$(1) \Rightarrow \mu(S_1) - \mu(S_i) \uparrow \mu(S_1) - \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i) \xRightarrow{\mu(S_1) \in \mathbb{R}} \mu(S_i) \downarrow \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i)$. $\square$

Зад. 2. Покажете, че

(а) $\chi_{S \cap T} = \chi_S \cdot \chi_T$

(б) $\chi_{S \cup T} = \chi_S + \chi_T - \chi_{S \cap T}$

(в) Ако $S \cap T = \emptyset$, то $\chi_{S \cup T} = \chi_S + \chi_T$

(г) $\chi_{S^c} = 1 - \chi_S$

Зад.3 Покажете, че в общия случай от измеримостта по Лебег $|f|$ не следва измеримост по Лебег на f.

Зад.4 Покажете, че ако f е изм. и $g \equiv f$ почти навсякъде, то и g е измерима

<u>Зад. 5</u> Постройте пример на неизмерима по Лебег ф-ция f, за която всяко множество от вида

$$\{x \in [a,b],\ f(x)=c\},\ c \in \mathbb{R}$$

е измеримо.

<u>Опр.</u> Нека $(X, \mathcal{F})$ е измеримо пространство. Казваме, че мярката μ е <u>пълна</u> върху $\mathcal{F}$, ако

$$S \in \mathcal{F} \text{ и } \mu(S)=0 \Rightarrow T \in \mathcal{F} \ \forall\, T \subseteq S$$

Ясно е, че тогава $\mu(T)=0$

<u>Зад. 6</u> Да предположим, че мярката μ не е пълна върху изм. пр-во $(X,\mathcal{F})$. Докажете, че множеството

$$\overline{\mathcal{F}} = \{E \cup S : E \in \mathcal{F},\ S \subseteq F \text{ с } \mu(F)=0\}$$

е σ-алгебра и че μ може да се продължи до мярка $\overline{\mu}$ върху $\overline{\mathcal{F}}$, при това $\overline{\mu}$ е единствена.

$\overline{\mu}$ се нарича попълване на μ.

23.03.2018 Зад. 6 от предното упражнение

Зад. 1 $\mathcal{F}$ - σ-алгебра, $\overline{\mathcal{F}} = \{E \cup T \mid E \in \mathcal{F}, T \subseteq S, \mu(S) = 0\}$

Док. че $\overline{\mathcal{F}}$ е σ-алгебра и че μ може да се продължи в-ху $\overline{\mathcal{F}}$.

Реш. Проверяваме аксиомите за σ-алгебра (Емилиян)

(а) $\emptyset \in \overline{\mathcal{F}}$, понеже $\emptyset \subseteq \emptyset \cup \emptyset$

(б) $A \in \overline{\mathcal{F}}$, $A = E \cup T$

$$X \setminus A = X \setminus (E \cup T) = \overbrace{(X \setminus (E \cup S))}^{\in \mathcal{F}} \cup \overbrace{((S \setminus E) \setminus T)}^{\subseteq S} \in \overline{\mathcal{F}}$$

(в) $\{A_i \in \overline{\mathcal{F}}\}$, където $A_i = E_i \cup T_i$, $E_i \in \mathcal{F}$, $T_i \subseteq S_i$, $\mu(S_i) = 0$

$$\cup A_i = \cup (E_i \cup T_i) = (\cup E_i) \cup (\cup T_i)$$

$$0 \leq \mu(\cup S_i) \leq \sum \mu(S_i) = 0$$

Нека

$\overline{\mu}(A) = \mu(E)$ за $A = E \cup T$

Проверяваме, че $\overline{\mu}$ е добре дефинирана

$A = E_1 \cup T_1 = E_2 \cup T_2$, $T_i \subseteq S_i$, $\mu(S_i) = 0$

$E_1 \subseteq E_1 \cup T_1 = A \subseteq E_1 \cup S_1 \quad \setminus E_1$

$\emptyset \subseteq A \setminus E_1 \subseteq S_1 \setminus E_1$

$E_2 \subseteq \subseteq A \subseteq E_2 \cup S_2 \quad \setminus E_1$

$E_2 \setminus E_1 \subseteq A \setminus E_1 \subseteq (E_2 \cup S_2) \setminus E_1$

$E_2 \setminus E_1 \subseteq \ldots \subseteq S_1 \setminus E_1 \subseteq S_1$

$\mu(E_2 \setminus E_1) = 0 = \mu(E_1 \setminus E_2)$

$\mu(E_1) = \mu(E_1 \cup E_2) + \mu(E_1 \setminus E_2) = \mu(E_1 \cup E_2) + \mu(E_2 \setminus E_1) = \mu(E_2)$

Коментар (доц. Драганов): може да стане по-лесно и така:

$E_1 \subseteq A = E_2 \cup T_2 \subseteq E_2 \cup S_2$

$\mu(E_1) \leq \mu(E_2 \cup S_2) \leq \mu(E_2) \underbrace{\mu(S_2)}_{=0}$

Продължение:

Проверяваме, че $\bar{\mu}$ е мярка:

(а) $\mu(\emptyset) = 0$

(б) $A_i = E_i \cup T_i$, $T_i \subseteq S_i$ $\quad A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$

$\bar{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bar{\mu}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i)$

Единственост:

Нека $\bar{\mu}$ е някоя произволна мярка на $\bar{\mathcal{F}}$

$A = E \cup T \in \bar{\mathcal{F}}$, $E \in \mathcal{F}$, $T \subseteq S$, $\mu(S) = 0$

$B = \emptyset \cup (S \setminus T) \in \bar{\mathcal{F}}$

$\bar{\mu}(A) = \bar{\mu}(E \cup T)$

$\bar{\mu}(E \cup T) + \bar{\mu}(\emptyset \cup (S \setminus T)) \geq \bar{\mu}(E \cup T \cup \emptyset \cup (S \setminus T)) = \bar{\mu}(E \cup S) = \bar{\mu}(E)$

$E \cup S \supseteq E \cup T = A \supseteq E$

$\bar{\mu}(E \cup S) \geq \bar{\mu}(A) \geq \bar{\mu}(E)$, но $\bar{\mu}(E) = \bar{\mu}(E \cup S)$.

<u>Зад. 2</u> Ако $f \in M(X)$ и $\mu(A) = 0$, то да се докаже, че $\chi_A f \in L$ и $\int_A f \, d\mu = 0$

Зад.3 Нека $f, g \in M(X)$. Тогава

(а) ако $|f| \le g$ п.н. и $g \in L(X)$, то $f \in L(X)$

(б) ако $f = g$ п.н. и $g \in L(X)$, то $f \in L(X)$ и $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$

Зад.4 Покажете, че ако $\int_S f\,d\mu = 0$ $\forall$ изм. S, то $f = 0$ п.н.

30.03.2018

Зад. 1 (Зад. 3 от предното упр.) Нека $f, g \in M(X)$. Докажете, че

(а) Ако $|f| \le g$ п.н. и $g \in L(X)$, то $f \in L(X)$

(б) Ако $f = g$ п.н. и $g \in L(X)$, то $f \in L(X)$ и $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.

<u>Д-во</u>

(а) Ако $|f(x)| \le g(x) \in L(X)\ \forall x$, ще докажем, че $f \in L(X)$.

От самата дефиниция за ~~[illegible]~~ интегруемост $\Rightarrow f \in L \Leftrightarrow |f| \in L \Leftrightarrow \int |f|\,d\mu$ е краен.

После използваме, че $|f|, g \in M^+$ и $|f| \le g \overset{\text{мон}}{\Rightarrow} \int |f|\,d\mu \le \int g\,d\mu < \infty$

Общият случай ($|f(x)| \le g(x)$ п.н.) ще докажем по следния начин:

$E = \{x : |f(x)| > g(x)\}$ - изм. и $\mu(E) = 0$

$\chi_E |f| = 0$ п.н.

$$\int_X |f|\,d\mu = \int_{X\setminus E} |f|\,d\mu + \underbrace{\int_E |f|\,d\mu}_{=0} \le \int_{X\setminus E} g\,d\mu + \underbrace{\int_E g\,d\mu}_{=0} < \infty$$

$|f(x)| \le g(x)$ в-ху $X \setminus E$.

(б) $f = g$ п.н. и $g \in L \Rightarrow |f| \le |g|$ п.н. и $|g| \in L \overset{(а)}{\Rightarrow} f \in L$ и

$\int |f| \le \int |g|$. По-нататък използваме, че $h = \underbrace{f - g}_{\in L} = 0$ п.н. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int (f-g)\,d\mu = \underbrace{\int 0\,d\mu}_{\underbrace{\int_E h\,d\mu}_{=0,\ \mu(E)=0} + \underbrace{\int_{X\setminus E} h\,d\mu}_{=0}} = 0.$$

<u>Тв.</u> $h \in L(X)$ и $h = 0$ п.н. $\Rightarrow \int h\,d\mu = 0$

Д-во $h = h^+ - h^-$

$h = 0$ п.н. $\Rightarrow h^+ = h^- = 0$ п.н.

Алтернативно д-во:

$h \in L \Rightarrow |h| \in L$

$0 \le \left|\int h\, d\mu\right| \le \int |h|\, d\mu = 0$

Зад.2 Нека $f \in M^+(X)$. За $A \in \mathcal{F}$ полагаме $\lambda(A) = \int_A f\, d\mu$.
Да се докаже, че λ е мярка в-ху $\mathcal{F}$.

Зад.3 (абс. непрекъснатост на лебеговия интеграл). Нека $f \in L$.
Докажете, че $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \mu(S) < \delta \Rightarrow \int_S |f|\, d\mu < \varepsilon$.

13.03.2018

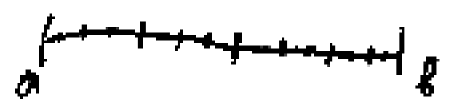
Зад. 1

Т-ма Една ограничена функция, дефинирана в-ху краен затворен интервал, е инт. по Риман <=> е непр. п.н. относно класическата лебегова мярка.

Д-во Ще представим деф. на Дарбу за интегруемост посредством лебеговия ~~интеграл~~ интеграл

Нека $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. Удобно е да разгледаме вложени разбивания на $[a,b]$. Те се получават чрез последователно делене на всеки един интервал на две равни части. По-точно

$$\tau_n := a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2^n} = b$$



Имаме, че $\tau_n \leq \tau_{n+1}$. За сумите на Дарбу имаме

$$s_{\tau_n} := \sum_{i=1}^{2^n} \overbrace{\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)}^{m_{n,i}} (x_i - x_{i-1})$$

$$S_{\tau_n} := \sum_{i=1}^{2^n} \underbrace{\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)}_{M_{n,i}} (x_i - x_{i-1})$$

Представяме тези суми посредством лебегови интеграли. Дефинираме

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{2^n-1} m_{n,i}\, \chi_{[x_{i-1}, x_i)}(x) + m_{n,2^n}\, \chi_{[x_{2^n-1}, b]}(x)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \varphi_n \, dm = s_{\tau_n}.$$

Аналогично дефинираме $\psi_n(x)$: $\int_a^b \psi_n \, dm = S_{\tau_n}$

Както знаем от лемата на Дарбу

$\lim\limits_{n\to\infty} s_{\tau_n} = \underline{I}(f)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\tau_n} = \overline{I}(f)$.

Имаме, че $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща $\forall x$. Аналогично, $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща $\forall x$. Следователно $\exists\, \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)\ \forall x$ и $\exists\, \psi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x)\ \forall x$.

Ще приложим т-мата на Бепо Леви, за да извършим граничен преход под лебеговия интеграл за $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$. Относно $\{\varphi_n\}$ да забележим, че $\varphi_n(x) \geq \varphi_0(x) = \underbrace{\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)(b-a)}_{C}$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n(x) - C \geq 0\ \forall x$. Ясно е, че $\tilde{\varphi}_n$ са измерими ф-ции и $\tilde{\varphi}_n \uparrow \varphi - C\ \forall x$. Теоремата на БЛ за $\{\tilde{\varphi}_n\}$ влече $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \tilde{\varphi}_n\, dm = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} \hat{\varphi}_n\, dm = \int_a^b (\varphi - C)\, dm =$

$= \int_a^b \varphi\, dm - C(b-a)$.

Анал. $\int_a^b \tilde{\varphi}_n\, dm = \int_a^b \varphi_n\, dm - C(b-a)$.

Така установихме, че $\int_a^b \varphi_n\, dm \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \varphi\, dm$, при това $\varphi - C \in M^+$ с краен интеграл $\Rightarrow$ φ е сумируема.

Да отбележим, че тъжд. конст. са сумируеми. Така доказахме, че $\underline{I}(f) = \int_a^b \varphi\, dm$.

Аналогично показахме, че $\psi_n(x) \leq \psi_0(x) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) = C$.

$\Rightarrow \tilde{\psi}_n(x) = C - \psi_n(x) \geq 0\ \forall x$ и е измерима;

Ясно е, че $\tilde{\psi}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} (-\psi(x)\ \forall x$. Отново аналогично

$$\int_a^b \psi_n dm \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \psi dm \Rightarrow \overline{I}(f) = \int_a^b \psi dm \Rightarrow \psi \in L[a,b]$$

Следователно $f(x)$ е интег. по Риман $\Leftrightarrow \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$

$$\Leftrightarrow \int_a^b \varphi dm = \int_a^b \psi dm \Leftrightarrow \int_a^b (\psi - \varphi) dm = 0.$$

(така е, защото $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x)\ \forall x \forall n \Rightarrow \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)\ \forall x$)

$\Leftrightarrow \psi(x) - \varphi(x) = 0$ п.н. в $[a,b]$, тоест $\varphi(x) = \psi(x)$ п.н. в $[a,b]$.

Остава да забележим, че ако означим с S мн-вото от точки на деление на всички разбивания, то ако $x_0 \notin S$

$\varphi(x_0) = \psi(x_0) \Leftrightarrow f(x)$ е непр. в x_0.

Но $m(S) = 0 \Rightarrow \varphi(x_0) = \psi(x_0)$ п.н. $\Leftrightarrow f$ е непр. в x_0
за $x_0 \notin S \cup T$

T е множеството, в което $\psi(x) \neq \varphi(x)$ $(m(T) = 0)$

□

20.04.2018 Функции с ограничена вариация

<u>Зад. 1</u> Нека $f_p:[0,1]\to\mathbb{R}$ е дефинирана чрез

$$f_p(x)=\begin{cases} x^p\sin\frac{1}{x}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Докажете, че $f_p\in BV[0,1] \iff p>1$

<u>Зад.* 2</u> Докажете, че $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е диференцируема и производната ѝ е интегруема по Риман, то $f\in BV[a,b]$.

$$\bigvee_a^b f=\int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

<u>Зад. 3</u> (кандидат за определение за непрекъснатост от преди Коши)

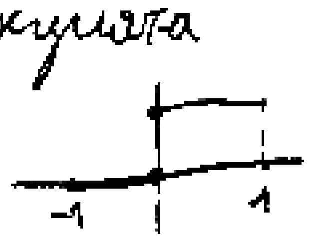
<u>Опр.</u> Казваме, че $f(x)$ притежава <u>св-вото на междинните стойности</u>, ако от това, че $f(x_1)<y<f(x_2) \Rightarrow \exists x_0\in(x_1,x_2)$ и $f(x_0)=y$.

Докажете, че всяка функция с ограничена вариация, която удовлетворява свойството на междинните стойности, е непрекъсната

<u>Подсказка</u> Намерете прекъсната функция, която да удовлетворява свойството на междинните стойности.

<u>Зад. 4</u> Постройте и разгледайте основните св-ва на мярката на Лебег-Стилтес и съответния интервал за функцията

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, & x\in[0,1] \\ 0, & x\in[-1,0) \end{cases}$$



метод на Каратеодори

Зад. 5 Нека μ^* е външна мярка в-ху X. Докажете, че рестрикцията на μ^* в-ху $\mathcal{M} = \mathcal{M}(X, \mu^*)$ е винаги пълна.

Забел. Оказва се, че рестрикцията на породената от дадена предмярка μ_0 в-ху $\mathcal{A}$ външна мярка в-ху $\sigma(\mathcal{A})$ „рядко" е пълна.

Решение μ е пълна, ако от $\mu(S)=0 \Rightarrow \forall T \subseteq S$ също $T \in \mathcal{M}$ и $\mu(T) \in \mathcal{M}$

Освен това $S \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \mu^*(Y \cap S) + \mu^*(Y \cap S^c) = \mu^*(Y) \quad \forall Y \subseteq X.$ (*)

За да установим, че $\mu^*/_{\mathcal{M}}$ е пълна, трябва да покажем, че ако $\mu^*(S)=0$ и $S \in \mathcal{M}$ и $T \subseteq S$, то T удовлетворява (*).

$S \supseteq Y \cap S \supseteq (Y \cap T) \Rightarrow \mu^*(Y \cap T) = 0$, понеже $\mu^*(S)=0 \mid \forall Y \subseteq X$

$\mu^*(Y) = \mu^*(Y \cap T^c) \quad \forall Y \subseteq X.$

□

27.04.2018

Зад. 1 Нека $(X, \mathcal{M}, \mu)$ е σ-крайно пространство с мярка. Нека f е неотрицателна неизмерима ф-ция. Полагаме $\mathcal{U} = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}^+ : t < f(x)$ също и $t \leq f(x)\}$. Докажете, че $\mathcal{U} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}$, където $\mathcal{L}$ е σ-алгебрата на измеримите по Лебег множества на $\mathbb{R}^+$. При това $(\mu \times m)(\mathcal{U}) = \int_X f \, d\mu$.

Д-во Полагаме $F(x,t) = f(x) - t$, $x \in X$, $t > 0$. Тогава множеството $\mathcal{U}$ съвпада с $\{(x,t) \in X \times \mathbb{R}^+ : F(x,t) > 0\}$. Ако установим, че $F \in \mathcal{M}(X \times \mathbb{R}^+, \mathcal{M} \otimes \mathcal{L})$, то $\mathcal{U} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}$. $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{M}) \Rightarrow$ ако разгледаме $f(x)$ като ф-ция на $(x,t) \in X \times \mathbb{R}^+$ е също измерима, тоест $f \in \mathcal{M}(X \times \mathbb{R}^+, \mathcal{M} \otimes \mathcal{L})$. Действително, ако $c \in \mathbb{R}$, то $\{(x,t) \in X \times \mathbb{R}^+ : f(x) > c\} = \underbrace{\{x \in X : f(x) > c\}}_{\in \mathcal{M}} \times \underbrace{\mathbb{R}^+}_{\in \mathcal{L}} \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}$;

Функцията $g(t) = t$ е непрекъсната в $[0, \infty) \Rightarrow$ е измерима по Лебег относно $\mathcal{L}$. Както по-горе, установяваме, че $g \in \mathcal{M}(X \times \mathbb{R}^+, \mathcal{M} \otimes \mathcal{L})$. Следователно $F(x,t) = f(x) - g(t) \in \mathcal{M}(X \times \mathbb{R}^+, \mathcal{M} \otimes \mathcal{L})$. Относно формулата, използваме т-мата на Тонели (дори тв. 2 е достатъчно). Имаме

$$(\mu \times m)(\mathcal{U}) = \int_{X \times \mathbb{R}^+} \chi_{\mathcal{U}}(x,t) \, d(\mu \times m) = \int_X \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^+} \chi_{\mathcal{U}}(x,t) \, dm}_{f(x) \, = \, \int_0^{f(x)} dm} \Big) d\mu =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \Big(\underbrace{\int_X \chi_{\mathcal{U}}(x,t) \, d\mu}_{\mu(\mathcal{U}^t) = \{x \in X : f(x) > t\}} \Big) dm$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \psi_f \, dm = \int_X f \, d\mu$$

$\square$

07.05.2018

Зад. 1 (зад. 4 от 20.04.2018) Да се изследват св-вата на φ за Лебег-Стилтесов интеграл

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\in[-1,0)\end{cases}$$

Решение

$$\varphi_+(x)=\lim_{u\to x+0}\varphi(u),\quad x\in(-1,1)$$

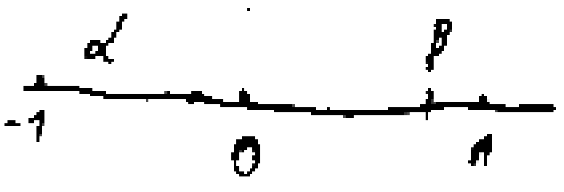
$$\varphi_-(x)=\lim_{u\to x-0}\varphi(u),\quad x\in(-1,1)$$

$$\varphi_+(x)=\left.\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\in[-1,0)\end{cases}\right\}=\varphi(x)$$

$$\varphi_-(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,1]\\ 0, & x\in[-1,0]\end{cases}$$

$$\mu_0([\alpha,\beta])=\varphi_+(\beta)-\varphi_-(\alpha)=\begin{cases}1-0, & \beta\in[0,1],\ \alpha\in[-1,0]\\ 1-1, & \beta\in[0,1],\ \alpha\in(0,1]\\ 0-0, & \beta\in[-1,0)\end{cases}=\begin{cases}1, & 0\in[\alpha,\beta]\\ 0, & 0\notin[\alpha,\beta]\end{cases}$$

$$\mu_0((\alpha,\beta])=\begin{cases}1, & \varphi_+(\beta)=1 \text{ и } \varphi_+(\alpha)=0\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}=\begin{cases}1, & 0\in(\alpha,\beta]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$



Изобщо, ако I е интервал, то $\mu_0(I)=\begin{cases}1, & 0\in I\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}=\chi_I(0)$

По-нататък се убеждаваме, че ако μ^* е породената от μ_0 външна мярка и $\mu=\mu^*|_{M([-1,1],\mu^*)}$ имаме, че $\mu(S)=1 \Leftrightarrow 0\in S$, а иначе е 0. Наистина,

$$\mu^*=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(J_k):\ \bigcup_{k=1}^{\infty}J_k\supseteq S,\ J_k\subseteq[-1,1] \text{ са интервали}\right\}$$

Б.о.о. можем да считаме, че J_k не се пресичат.

Ако $0\notin S$, то $\exists$ покритие $\{J_k\}: 0\notin\bigcup J_k\supseteq S$. Тогава $\mu^*(S)=0$.

Ако пък $0 \in S$, то $0 \in \cup J_k$ $\forall$ покритие $\{J_k\}$ на $S \Rightarrow \exists! J_{k_0} \ni 0 \Rightarrow \mu_0(J_{k_0}) = 1$,
а $\mu_0(J_k) = 0$ $\forall k \neq k_0 \Rightarrow \mu^*(S) = 1$.

S е μ^*-измеримо $\Leftrightarrow \mu^*(Y \cap S) + \mu^*(Y \cap S^c) = \mu^*(Y)$ $\forall Y \subseteq [-1,1]$.

Достатъчно е да докажем $\leq$. Най-много едно от събираемите вляво може да е $=1$. Тогава, ако $\mu^*(Y)=1$, неравенството е тривиално. Нека $\mu^*(Y)=0$. Това означава, че $Y \not\ni 0 \Rightarrow 0 \notin Y \cap S$ и $0 \notin Y \cap S^c$ и неравенството е изпълнено. Следователно всяко подмножество на $[-1,1]$ е измеримо и $\mathcal{M}([-1,1],\mu^*) = \mathcal{P}([-1,1])$.

$f := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{T_k}$ - каноничен запис на SF^+ ф-цията f.

Тогава $\int_{-1}^{1} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(T_k)$. Точно едно T_k съдържа 0. Нека $T_{k_0} \ni 0$.
Тогава $\mu(T_{k_0}) = 1$, а $\mu(T_k) = 0$ $\forall k \neq k_0$. Тогава $\int_{-1}^{1} f \, d\mu = \alpha_{k_0} \mu(T_{k_0}) = \alpha_{k_0}$.
Но $\alpha_{k_0} = f(0)$. $\Rightarrow \int_{-1}^{1} f \, d\mu = f(0)$. Нека $f \in \mathcal{M}^+$ ($\forall f : [-1,1] \to [-\infty,+\infty]$ е измерима),
тоест $f \geq 0$. Тогава $\int_{-1}^{1} f \, d\mu = \sup\{\int_{-1}^{1} \varphi \, d\mu : \varphi \leq f, \varphi \in SF^+\} =$

$= \sup\{\varphi(0) \leq f(0)\} = f(0)$. За $f : [-1,1] \to [-\infty,+\infty]$ образуваме $\underbrace{f^+ \text{ и } f^-}_{\in \mathcal{M}^+}$ чрез $f = f^+ - f^-$. Тогава $f \in L \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f^{\pm} \, d\mu < \infty$,
тоест $f^{\pm}(0) < \infty \Leftrightarrow f(0) = f^+(0) - f^-(0) < \infty$ и тогава $\int_{-1}^{1} f \, d\mu = f(0)$.

Теорема за граничен преход: $f_n(x) \uparrow f(x)$ $\forall x \in [-1,1] \Rightarrow f_n(0) \to f(0)$,
тоест $\int_{-1}^{1} f_n \, d\mu \to \int_{-1}^{1} f \, d\mu$.

18.05.2018

Зад. 1 Нека μ, ν_1 и ν_2 са крайни положителни мерки в-ху $(X,\mathcal{F})$. Докажете, че ако $\nu_1 \ll \mu$ и $\nu_2 \ll \mu$, то $\nu_1+\nu_2 \ll \mu$ и

$$\frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}.$$

Д-во По деф. $\nu_1 \ll \mu$ означава, че ако $\mu(S)=0$, то и $\nu_1(S)=0$. Нека $\mu(S)=0$. Тогава $(\nu_1+\nu_2)(S) = \nu_1(S)+\nu_2(S) = 0+0=0 \Rightarrow \nu_1+\nu_2 \ll \mu$.

По-нататък прилагаме т-мата на Радон-Никодим към крайните положителни мерки $\nu_1+\nu_2$ и μ в-ху $(X,\mathcal{F})$, $\nu_1+\nu_2 \ll \mu$.

Това дава, че $\exists h \in L(X,\mu) : \int_X F\,d(\nu_1+\nu_2) = \int_X F h\,d\mu \quad \forall F \in M^+(X,\mathcal{F})$.

По деф. $\frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu} = h$.

Аналогично, прилагайки същата теорема към двойките мерки $\nu_1 \ll \mu$ и $\nu_2 \ll \mu$ получаваме, че $\exists h_1, h_2 \in L(X,\mu)$:

$$\left.\begin{aligned} \int_X F\,d\nu_1 &= \int_X F h_1\,d\mu \\ \int_X F\,d\nu_2 &= \int_X F h_2\,d\mu \end{aligned}\right\} \forall F \in M^+(X,\mathcal{F})$$

Като комбинираме изведените формули, получаваме $\forall F \in M^+$

$$\underbrace{\int_X F\,d(\nu_1+\nu_2)}_{\int_X F\,d\nu_1 + \int_X F\,d\nu_2} = \int_X F h\,d\mu$$

$$\int_X F\,d\nu_1 + \int_X F\,d\nu_2 = \int_X F h_1\,d\mu + \int_X F h_2\,d\mu = \int F(h_1+h_2)\,d\mu$$

Така установихме, че

$$\int_X Fh\,d\mu = \int_X F(h_1+h_2)\,d\mu \quad \forall F \in M^+(X,\mathcal{F})$$

$$\Rightarrow \int_X F(h-(h_1+h_2))\,d\mu = 0 \quad \forall F \in M^+(X,\mathcal{F}) \qquad (5)$$

Разглеждаме множеството $S_+ = \{x : h(x) - (h_1(x)+h_2(x)) > 0\} \in \mathcal{F}$ и от (5) с $F = \chi_{S_+} \Rightarrow \int_{S_+} \underbrace{(h-(h_1+h_2))}_{\geq 0}\,d\mu = 0 \Rightarrow h(x) - (h_1(x)+h_2(x)) = 0$ п.н. в $S_+ \Rightarrow \mu(S_+) = 0$.

Аналогично се установява, че ако $S_- = \{x \in X : h(x) - (h_1(x)+h_2(x)) < 0\}$, то $\mu(S_-) = 0$. $\left(\chi_{S_+}(\underbrace{h-(h_1+h_2)}_{>0 \text{ в-ху } S_+}) = 0 \text{ п.н.} \Rightarrow \mu(S_+) = 0\right)$.

Така установихме, че $h = h_1 + h_2$ п.н.

Зад.2 Нека λ, μ и ν са крайни положителни мерки в-ху $(X,\mathcal{F})$. Докажете, че ако $\lambda \ll \nu$ и $\nu \ll \mu$, то $\lambda \ll \mu$ и $\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{d\lambda}{d\nu}\cdot\frac{d\nu}{d\mu}$.

Зад.3 Обобщете твърдението на т-мата на Радон-Никодим за σ-крайни пространства с мярка.

Реш. Предполагаме, че ν и μ са положителни мерки в-ху $(X,\mathcal{F})$, като X се представя във вида $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$, където $X_i \cap X_j = \emptyset$ за $i \neq j$, $X_j \in \mathcal{F}\ \forall j$ и $\mu(X_j) < \infty$, $\nu(X_j) < \infty\ \forall j$

Нека още $\nu \ll \mu$

Прилагаме т-мата на Радон-Никодим в-ху всяко едно от множествата X_j (в-ху X_j μ и ν са крайни положителни мерки).

$$\mathcal{F}_j = \{X_j \cap S : S \in \mathcal{F}\}$$

Тогава $\exists h_j \in L(X_j, \mu)$ и $h_j \geq 0$ п.н. отн. μ.

$$\int_{X_j} F d\nu = \int_{X_j} F h_j d\mu, \quad j = 1, 2, \ldots \quad F = \mathcal{M}^+(X_j, \mathcal{F}_j)$$

$$\Rightarrow \int_X \chi_{X_j} F d\nu = \int_X \chi_{X_j} F h_j d\mu. \qquad (6)$$

Нека $F \in \mathcal{M}(X, \mu)$. Представяме я във вида $F = \sum_{j=1}^{\infty} F \chi_{X_j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_X F d\nu = \int_X \left(\sum_{j=1}^{\infty} F \chi_j\right) d\nu \overset{БЛ}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_X F \chi_j d\nu \overset{(6)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \chi_{X_j} F h_j d\mu =$$

$$\overset{БЛ.}{=} \int_X F \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{X_j} h_j}_{h} d\mu$$

25.05.2018 <u>Зад. 1</u> Намерете производните на Дини в т. 0 на функциите

(а) $f(x) = |x|$

(б) $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

<u>Реш.</u> (а) $D_- f(0) = \liminf\limits_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \inf\limits_{x \in (-\varepsilon, 0)} \frac{|x|}{x} = -1 \; \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D_- f(0) = -1 \; \forall \varepsilon > 0$

$D^- f(0) = \limsup\limits_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \sup\limits_{x \in (-\varepsilon, 0)} \frac{|x|}{x} = -1 \; \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow D^- f(0) = -1$

Изобщо, $D_- f(x_0) = D^- f(x_0) = f'(x_0 - 0)$, аналогично $D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0) = f'(x_0+0)$

$D^+ f(0) = D_+ f(0) = 1$

(б) $\frac{x \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin\frac{1}{x} \not\xrightarrow[x \to 0]{}$

$D_- f(0) = \liminf\limits_{\varepsilon \to 0+0}^{x \in (-\varepsilon, 0)} \sin\frac{1}{x} = -1 \; \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow D_- f(0) = -1$

$D^- f(0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+0} \sup\limits_{x \in (-\varepsilon, 0)} \sin\frac{1}{x} = 1 \; \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow D^- f(0) = 1$

$\sin\frac{1}{x}$ е нечетна $\Rightarrow D_+ f(0) = D_- f(0) = -1$

$D^+ f(0) = D^- f(0) = 1$

01.06.2018 Класически теореми от ДИС (обобщения)

Зад.1 Ако $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ е диференцируема и $f'(x)$ е инт. по Риман, то

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

Зад.2 (ф-ла за интегриране по части). Нека $f, g \in AC([a,b])$ Тогава

$$\int_a^b f' g\,dm = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f g'\,dm$$

Зад.3 (смяна на променливата) Нека $f \in M^+[a,b]$ или $f \in L[a,b]$. Нека $g \in AC([\alpha,\beta])$ е монотонно растяща, като $a = g(\alpha)$ и $b = g(\beta)$. Тогава

$$\int_a^b f\,dm = \int_\alpha^\beta (f \circ g)\, g'\,dm.$$

Зад.4 (Тонели) Ако f е абс. непр., то $\bigvee_a^b f = \int_a^b |f'|\,dm$